

Κεφάλαιο 4

Χρονική απόκριση συστημάτων

4.1 Εισαγωγή

Η χρονική απόκριση αποτελεί ένα σημαντικό θέμα ανάλυσης και συνίσταται στην εύρεση και γραφική απεικόνιση της μεταβολής της εξόδου (απόκρισης) ενός συστήματος, συναρτήσει του χρόνου. Όπως είναι ήδη γνωστό, σε μια περιγραφή στο πεδίο του χρόνου όλα τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σύστημα (είσοδοι, έξοδοι, μεταβλητές κατάστασης) είναι συναρτήσεις του χρόνου. Σε πολλές περιπτώσεις, η έξοδος του συστήματος πρέπει να «ακολουθεί» την είσοδο όσο το δυνατόν πιο πιστά. Ως είσοδος τότε λαμβάνεται ένα πρότυπο σήμα που ισούται με την επιθυμητή έξοδο $y_d(t)$. Το σήμα αυτό συχνά ονομάζεται **είσοδος αναφοράς** (*reference input*) και τότε συμβολίζεται με $r(t)$. Με άλλα λόγια η έξοδος και η είσοδος αναφοράς πρέπει να είναι σήματα της ίδιας μορφής με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Το κατά πόσον αυτό επιτυγχάνεται μπορεί να βρεθεί συγκρίνοντας τα δύο σήματα, ως συναρτήσεις του χρόνου.

Η χρονική απόκριση ενός συστήματος χωρίζεται σε δύο μέρη: Τη **μεταβατική απόκριση** και τη **μόνιμη απόκριση**. Αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται συχνά οι όροι **μεταβατική κατάσταση** και **μόνιμη κατάσταση**.

Η **μεταβατική απόκριση** ορίζεται ως το τμήμα της χρονικής απόκρισης που μηδενίζεται καθώς αυξάνει ο χρόνος, δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{μετ}}(t) = 0 \quad (4.1)$$

Στον ορισμό αυτό ο άπειρος χρόνος έχει την έννοια του πρακτικά μεγάλου χρόνου. Επειδή και η έννοια αυτή είναι σχετική, θεωρούμε ότι τα μεταβατικά φαινόμενα σταματούν, όταν η απόκριση συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή και, είτε δεν μεταβάλλεται πλέον, είτε μεταβάλλεται ελάχιστα.

Η **μόνιμη απόκριση** είναι το τμήμα της απόκρισης που παραμένει μετά τον μηδενισμό της μεταβατικής απόκρισης. Με βάση τα παραπάνω, η μόνιμη απόκριση μπορεί να οριστεί ως

$$y_{\text{μον}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (4.2)$$

Η μόνιμη απόκριση, συγκρινόμενη με την είσοδο αναφοράς, δείχνει την ακρίβεια του συστήματος, δηλαδή, το κατά πόσον η έξοδος «ακολουθεί» την είσοδο. Η διαφορά των δύο σημάτων λέγεται **σφάλμα μόνιμης κατάστασης** και μελετάται διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους.

4.2 Συμπεριφορά στη μεταβατική κατάσταση

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το μεταβατικό τμήμα της χρονικής απόκρισης είναι εκείνο που μηδενίζεται, καθώς ο χρόνος αυξάνει. Εννοείται ότι η μεταβατική απόκριση έχει έννοια μόνον εφόσον αναφερόμαστε σε ένα ευσταθές σύστημα. Σε ένα ασταθές σύστημα η απόκριση δεν συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή και φυσικά δεν μπορεί να ελεγχθεί. Η έννοια της ευστάθειας θα αναπτυχθεί διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

4.2.1 Χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης

Η μεταβατική απόκριση συνήθως μελετάται θεωρώντας τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση, ως είσοδο αναφοράς. Αυτό γίνεται επειδή όλα τα χαρακτηριστικά της ορίζονται ευκολότερα με βάση την είσοδο αυτή. Κατ' επέκταση, η μεταβατική απόκριση μπορεί να μελετηθεί για οποιαδήποτε είσοδο. Το Σχ. 4.1 απεικονίζει μια τυπική μοναδιαία βηματική απόκριση γραμμικού συστήματος.

Για τη μεταβατική απόκριση ορίζονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Μέγιστη υπερέψωση (*overshoot*) είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής y_m και της τελικής τιμής y_f , της $y(t)$. Συχνά δίνεται με τη μορφή ποσοστού επί τοις εκατό,

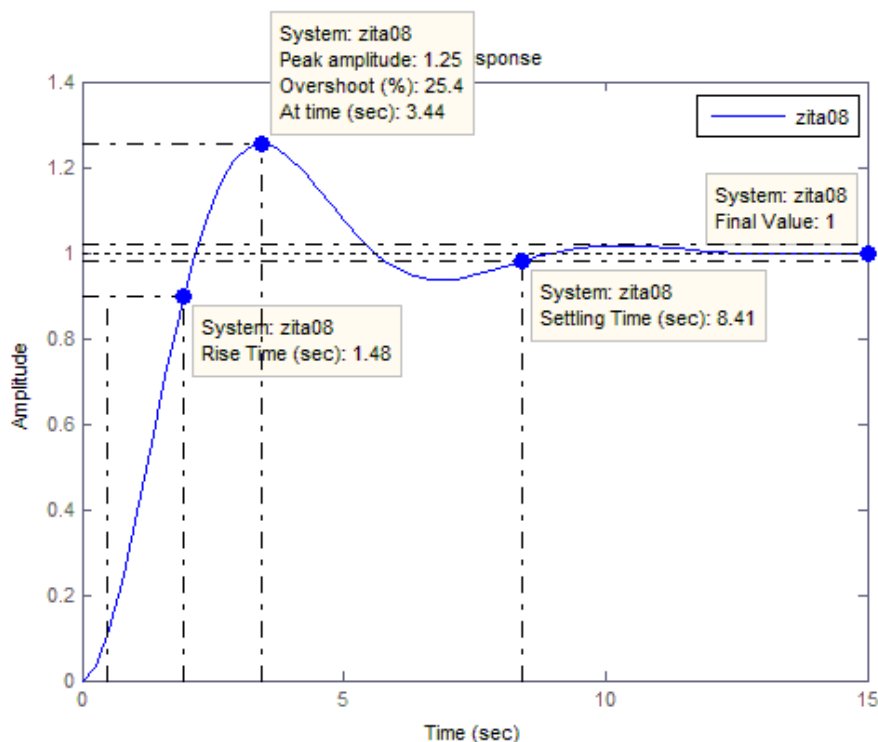
$$\nu\% = 100 \times \frac{y_m - y_f}{y_f} \% \quad (4.3)$$

Χρόνος καθυστέρησης (*delay time*) T_d είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η $y(t)$ στο μισό της τελικής τιμής της.

Χρόνος ανύψωσης (*rise time*) T_r είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η $y(t)$ από το 10% στο 90% της τελικής τιμής της.

Χρόνος αποκατάστασης (*settling time*) T_s είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει και να παραμείνει η $y(t)$ σε μια ορισμένη περιοχή κοντά στην τελική τιμή

της. Η περιοχή αυτή λαμβάνεται συνήθως από 2% έως 5% του πλάτους της τελικής τιμής y_f .



Σχήμα 4.1. Απόκριση για μοναδιαία βηματική είσοδο

Οι τέσσερις αυτές ποσότητες είναι εύκολο να βρεθούν, όταν είναι γνωστή η γραφική παράσταση της μεταβατικής απόκρισης και δίνουν ένα άμεσο μέτρο των χαρακτηριστικών της (αν π.χ. το σύστημα αποκρίνεται γρήγορα ή αργά, αν έχει ταλαντώσεις ή όχι, αν έχει σημαντική μέγιστη υπερύψωση κλπ.). Ωστόσο, στην περίπτωση που δεν είναι γνωστή η γραφική παράσταση, αλλά μόνο μια αναλυτική περιγραφή της $y(t)$, τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι δύσκολο να βρεθούν, εκτός βέβαια από πολύ απλές περιπτώσεις.

4.2.2 Μεταβατική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξης

Έστω το σύστημα πρώτης τάξης που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (4.4)$$

Το σύστημα πρώτης τάξης έχει ένα πόλο (ιδιοτιμή) στο σημείο $s = -1/T$ ενώ T είναι η χρονική σταθερά του συστήματος. Θεωρούμε τη βηματική συνάρτηση ως είσοδο

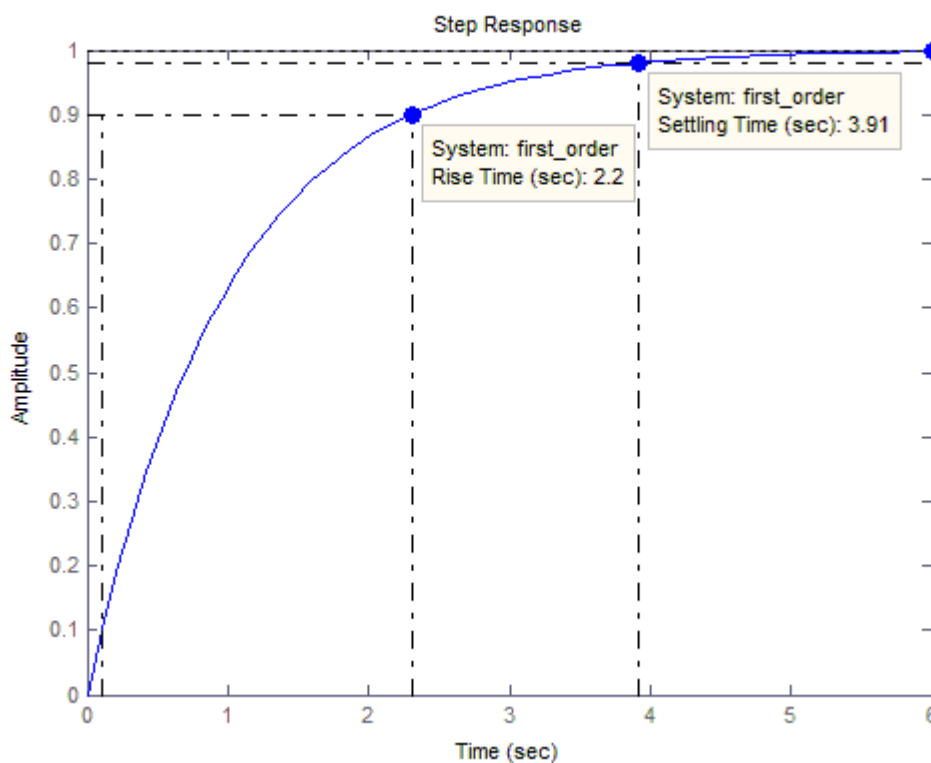
του συστήματος, δηλαδή, $R(s) = 1/s$. Τότε, η έξοδος του συστήματος στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας είναι

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.5)$$

Αναπτύσσοντας τη σχέση αυτή σε απλά κλάσματα και λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, προκύπτει η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου,

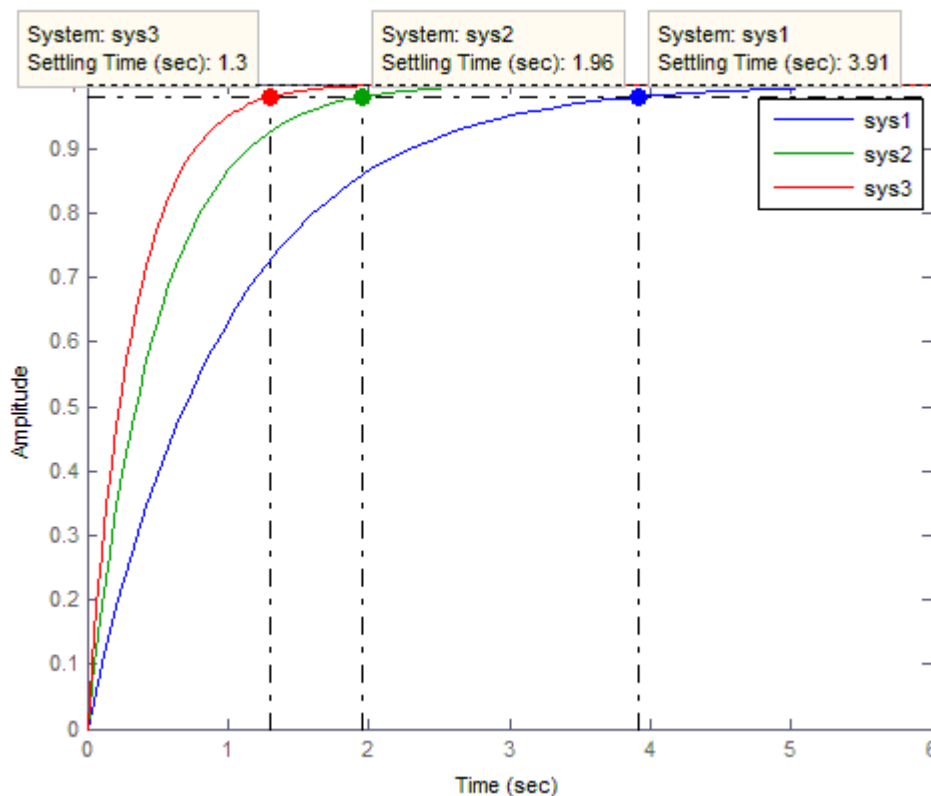
$$y(t) = 1 - e^{(-1/T)t} = 1 - e^{-t/T} \quad \text{για } t \geq 0 \quad (4.6)$$

Σημειώνεται ότι είναι $y(0) = 1 - 1 = 0$ και $y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$, ενώ $y(t) \rightarrow 1$, όταν $t \rightarrow \infty$. Με βάση τα στοιχεία αυτά, η χρονική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.2. Χρονική απόκριση συστήματος πρώτης τάξης

Για διαφορετικές τιμές της χρονικής σταθεράς λαμβάνονται οι παρακάτω μορφές της χρονικής απόκρισης



Σχήμα 4.3. Χρονική απόκριση συστημάτων πρώτης τάξης με χρονικές σταθερές $T=1$ (sys1), $T=1/2$ (sys2) και $T=1/3$ (sys3)

4.2.3 Μεταβατική απόκριση συστήματος 2^{ης} τάξης

Έστω το σύστημα δεύτερης τάξης που περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης (κανονικής μορφής φάσης),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (4.7)$$

όπου ζ και ω_n είναι σταθερές. Η εξίσωση εξόδου είναι

$$y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Έστω ότι για τη μελέτη της απόκρισης $y(t)$, θεωρούμε ως είσοδο τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $r(t) = u(t)$. Για τη μελέτη της απόκρισης έχουμε δύο τρόπους:

1. Να λύσουμε τις εξισώσεις κατάστασης (4.7) ως προς το διάνυσμα κατάστασης και στη συνέχεια από την (4.8) να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $y(t)$ συναρτήσει του t .

2. Από την περιγραφή κατάστασης (4.7) να μεταβούμε στην αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς και θεωρώντας ως είσοδο τη βηματική συνάρτηση να βρούμε την απόκριση, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων κατάστασης (4.7), ακόμη και για το σύστημα δεύτερης τάξης, είναι αρκετά πολύπλοκη. Ωστόσο, με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών η λύση προκύπτει εύκολα υπολογιστικά. Για τη βηματική είσοδο προκύπτει,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t + \psi) & \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t \\ -\omega_n \sin \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t & \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} \left\{ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t - \phi) \right\} \\ \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } \psi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta} \text{ και } \phi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}.$$

Με τον δεύτερο τρόπο λαμβάνεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.9)$$

Αυτή είναι μια **τυπική μορφή συνάρτησης μεταφοράς συστήματος δεύτερης τάξης**. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4.10)$$

Για μοναδιαία βηματική είσοδο $R(s) = 1/s$ η απόκριση είναι

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.11)$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $Y(s)$ προκύπτει

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t - \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}] \quad (4.12)$$

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης $p(s)=0$ και της χρονικής απόκρισης $y(t)$. Από την (4.10) προκύπτει ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = -\alpha \pm j\omega \quad (4.13)$$

Οι ρίζες αυτές είναι στη γενική περίπτωση μιγαδικοί αριθμοί, όπως φαίνεται και από την (4.13). Οι θέσεις τους στο μιγαδικό επίπεδο καθορίζονται από τις συντεταγμένες α και ω (πραγματικό και φανταστικό μέρος, αντίστοιχα). Είναι γνωστό ότι λέγονται και **πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς** ή **πόλοι του συστήματος**. Από τη μορφή τους στην (4.13) είναι προφανές ότι οι σταθερές ζ και ω_n επηρεάζουν τις θέσεις των πόλων επάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

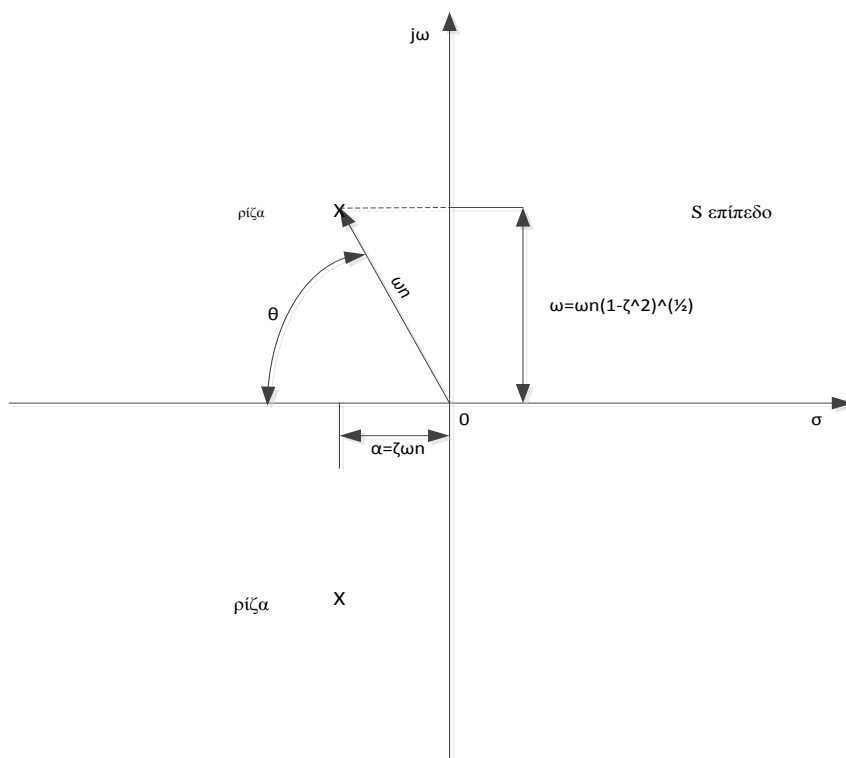
Επιπλέον, από τη σχέση (4.12) φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο οι σταθερές ζ και ω_n επηρεάζουν τη χρονική απόκριση του συστήματος: Το πραγματικό μέρος $\alpha = \zeta\omega_n$ επηρεάζει τον εκθετικό όρο της χρονικής απόκρισης και ειδικότερα καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πλάτος της $y(t)$ (εκθετική αύξηση ή μείωση). Για τον λόγο αυτό, η σταθερά α ονομάζεται και **σταθερά απόσβεσης**. Το αντίστροφο του πραγματικού μέρους, δηλαδή το $1/\alpha$ είναι ανάλογο της χρονικής σταθεράς του συστήματος.

Για $\zeta=1$, οι δύο ρίζες (4.13) της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές και ίσες. Στην περίπτωση αυτή $\alpha = \omega_n$ και $y(t)=1$. Η απόσβεση του συστήματος τότε λέγεται **κρίσιμη**.

Η σταθερά ζ λέγεται **συντελεστής απόσβεσης** και ορίζεται ως ο λόγος της πραγματικής σταθεράς απόσβεσης προς τη σταθερά απόσβεσης, όταν η απόσβεση είναι κρίσιμη, δηλαδή $\zeta = \alpha/\omega_n$.

Για $\zeta=0$, οι δύο ρίζες (4.13) της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι φανταστικές. Στην περίπτωση αυτή $\omega = \omega_n$ και η απόκριση $y(t)$ είναι ημιτονοειδής. Η σταθερά ω_n λέγεται **φυσική συχνότητα**. Το Σχ. 4.4 απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της θέσης των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης επάνω στο μιγαδικό επίπεδο και των σταθερών $\alpha, \omega, \zeta, \omega_n$.

Στη γενική περίπτωση, που οι πόλοι του συστήματος είναι μιγαδικοί, ω_n είναι η πολική ακτίνα (η απόσταση του μιγαδικού πόλου από την αρχή των αξόνων). Η σταθερά απόσβεσης α είναι το πραγματικό μέρος και ω είναι το φανταστικό μέρος του μιγαδικού πόλου. Ο συντελεστής απόσβεσης ζ ισούται με το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ της πολικής ακτίνας ω_n και του αρνητικού πραγματικού άξονα, δηλαδή, $\zeta = \cos \theta$.

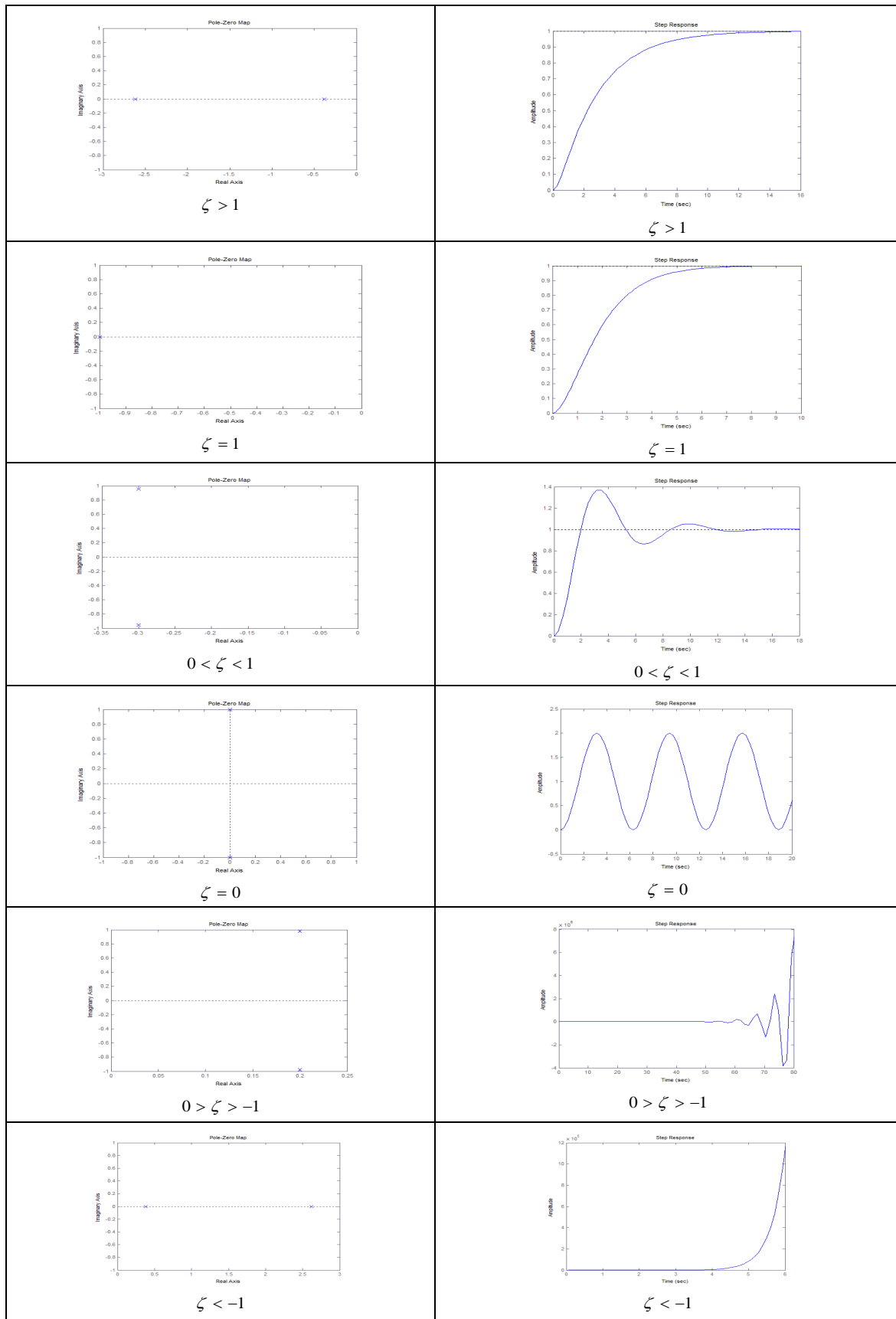


Σχήμα 4.4. Θέσεις των πόλων του συστήματος και σχέση με $\alpha, \omega, \zeta, \omega_n$

Το αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο αντιστοιχεί σε θετική απόσβεση (η σταθερά απόσβεσης είναι θετική), ενώ το δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο αντιστοιχεί σε αρνητική απόσβεση. Ο άξονας των φανταστικών αριθμών αντιστοιχεί σε μηδενική απόσβεση ($\alpha = 0, \zeta = 0$). Όπως φαίνεται από τη σχέση (4.12), όταν η απόσβεση είναι θετική, η βηματική απόκριση φτάνει στη σταθερή τελική τιμή της εκθετικά, ανάλογα με τον όρο $e^{-\zeta\omega_n t}$. Αρνητική απόσβεση αντιστοιχεί σε αύξουσα, μη-φραγμένη απόκριση. Τέλος, μηδενική απόσβεση αντιστοιχεί σε συντηρούμενη ημιτονοειδή ταλάντωση. Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις ορίζονται ως **ασταθείς**, για γραμμικά συστήματα. Όλες οι περιπτώσεις απόσβεσης ταξινομούνται στον Πίνακα 4.1.

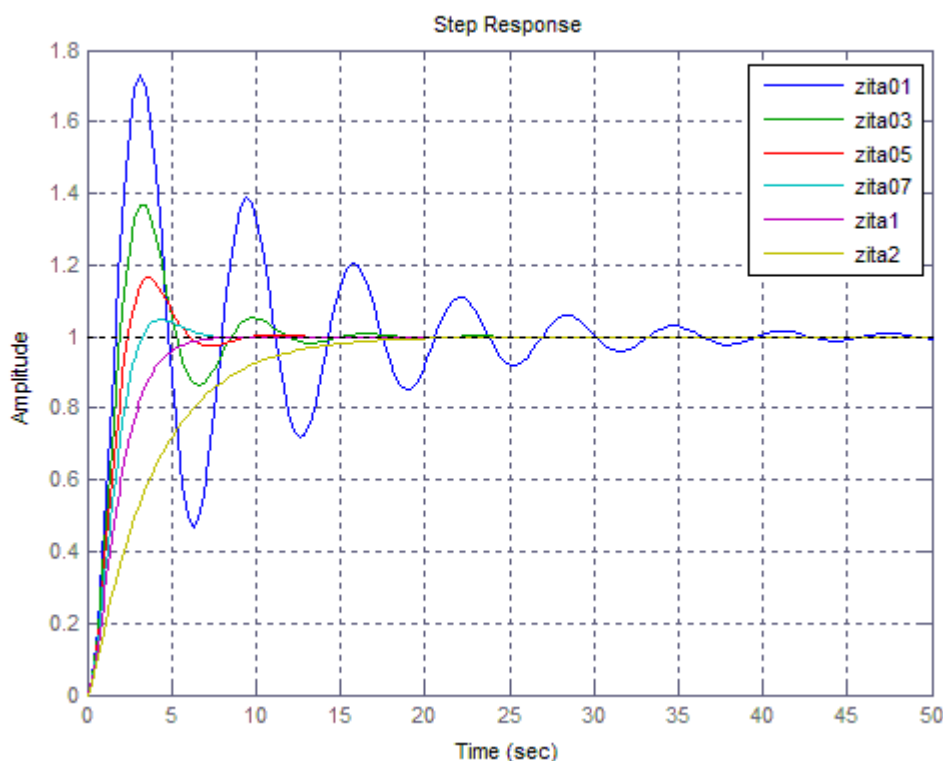
Πίνακας 4.1. Σχέση απόσβεσης – πόλων συστήματος

| Συντελεστής απόσβεσης ζ | Ρίζες χαρακτηρ. εξίσωσης | Φαινόμενο |
|-------------------------------|--|------------------------|
| $0 < \zeta < 1$ | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$ | Υποαπόσβεση |
| $\zeta = 1$ | $s_{1,2} = -\omega_n$ | Κρίσιμη απόσβεση |
| $\zeta > 1$ | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n(\zeta^2 - 1)^{1/2}$ | Υπεραπόσβεση |
| $\zeta = 0$ | $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ | Συντηρούμενη ταλάντωση |
| $\zeta < 0$ | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$ | Αρνητική απόσβεση |



Σχήμα 4.5. Βηματική απόκριση του συστήματος δεύτερης τάξης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης και αντίστοιχες θέσεις των πόλων

Στις πρακτικές εφαρμογές τα συστήματα πρέπει να είναι ευσταθή. Συνεπώς ενδιαφερόμαστε μόνο για περιπτώσεις με $\zeta > 0$. Το Σχ. 4.6 απεικονίζει τη βηματική απόκριση του συστήματος δεύτερης τάξης, για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ , συναρτήσει του κανονικοποιημένου χρόνου $\omega_n t$. Είναι φανερό ότι οι ταλαντώσεις της απόκρισης αυξάνουν, καθώς ο συντελεστής απόσβεσης ζ ελαττώνεται. Όταν $\zeta \geq 1$, η $y(t)$ δεν περνάει πάνω από την ευθεία $y(t) = 1$, δηλαδή η απόκριση δεν υπερβαίνει την τιμή της εισόδου αναφοράς. Με άλλα λόγια το σύστημα δεν εμφανίζει υπερύψωση.



Σχήμα 4.6. Μεταβατική απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης για μοναδιαία βηματική είσοδο

Η σχέση μεταξύ του συντελεστή απόσβεσης και της υπερύψωσης προκύπτει εξισώνοντας με μηδέν την παράγωγο της $y(t)$ ως προς τον χρόνο,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n t - \phi) + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} \cos(\omega_n t - \phi) = 0$$

όπου $\phi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}$. Η σχέση αυτή απλοποιείται στη μορφή,

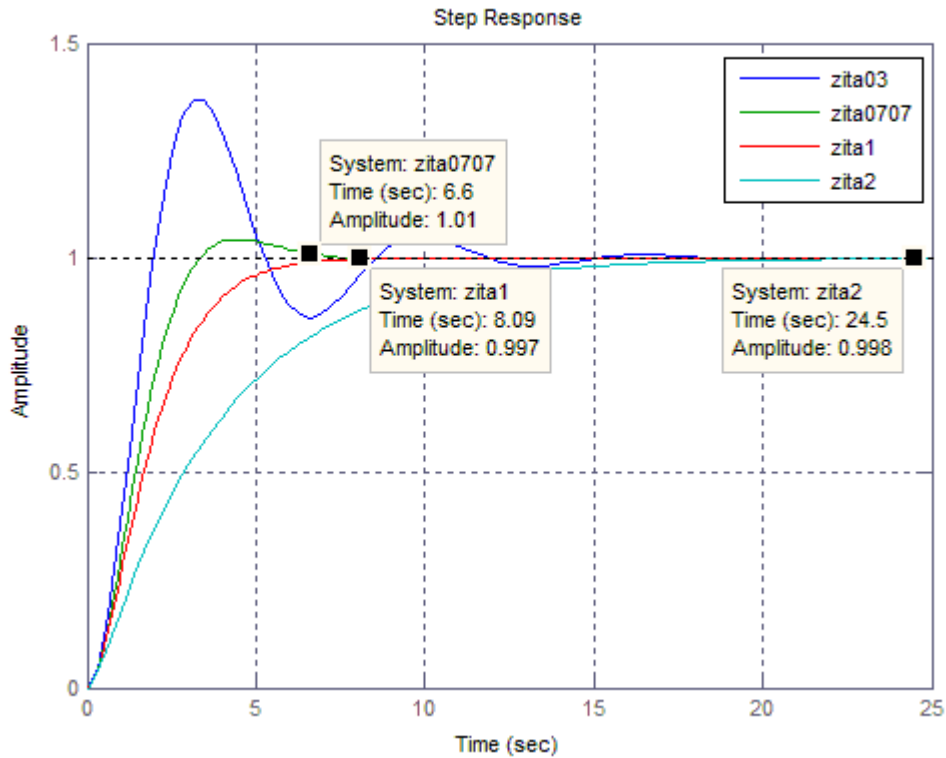
$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{(1-\zeta^2)^{1/2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t = 0 \quad (4.14)$$

Η (4.14) ισχύει για $t \rightarrow \infty$ και για $\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t = n\pi$, $n=0,1,2,\dots$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει, $t = n\pi / \omega_n (1-\zeta^2)^{1/2}$. Άρα, ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει η μέγιστη υπερένωση ($n=1$) είναι

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (4.15)$$

και η αντίστοιχη τιμή της απόκρισης είναι

$$y_m = 1 + e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.7. Σύγκριση μεταβατικής απόκρισης συστήματος δεύτερης τάξης για μοναδιαία βηματική είσοδο και διαφορετικές τιμές συντελεστή απόσβεσης

Επειδή ως μέγιστη υπερένωση ορίζεται το ποσό της απόκρισης που υπερβαίνει την τελική τιμή της, που στην περίπτωση της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης είναι 1, η **μέγιστη υπερένωση** του συστήματος δεύτερης τάξης για μοναδιαία βηματική είσοδο αναφοράς θα είναι

$$y_m - 1 = e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (4.17)$$

Το αντίστοιχο ποσοστό μέγιστης υπερύψωσης είναι

$$\nu\% = 100 \times e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}} \quad (4.18)$$

Τέλος, ο χρόνος αποκατάστασης μπορεί να εκφραστεί προσεγγιστικά από τη σχέση

$$T_s \cong \frac{3}{\zeta\omega_n}, \text{ για } 0 < \zeta < 1 \quad (4.19)$$

4.3 Συμπεριφορά στη μόνιμη κατάσταση – Ανάλυση σφάλματος

Σε ένα φυσικό σύστημα η απόκριση μόνιμης κατάστασης σπάνια «ακολουθεί» ακριβώς την είσοδο αναφοράς. Αυτό συμβαίνει λόγω της φύσης του εκάστοτε θεωρούμενου συστήματος (π.χ. τριβές, αδράνεια,...). Έτσι, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση είναι σχεδόν αναπόφευκτο. Ένας από τους στόχους σε προβλήματα ελέγχου είναι η επίτευξη μηδενικού σφάλματος ή έστω η διατήρησή του σε επιθυμητά χαμηλές τιμές. Τα ανεκτά επίπεδα σφάλματος μόνιμης κατάστασης καθορίζονται από τη φύση του εκάστοτε συστήματος και από τα ειδικά χαρακτηριστικά του. Για παράδειγμα, σφάλμα θέσης μερικών εκατοστών του μέτρου είναι αμελητέο για ένα ρομπότ που χρησιμοποιείται σε εφαρμογές εξόρυξης, αλλά είναι καταστροφικό αν το ρομπότ χρησιμοποιείται σε εφαρμογές μικροηλεκτρονικής ή μικροχειρουργικής.

Αν η είσοδος αναφοράς και η έξοδος είναι σήματα της ίδιας φύσης και τάξης μεγέθους, τότε το σφάλμα είναι απλά η διαφορά τους, δηλαδή,

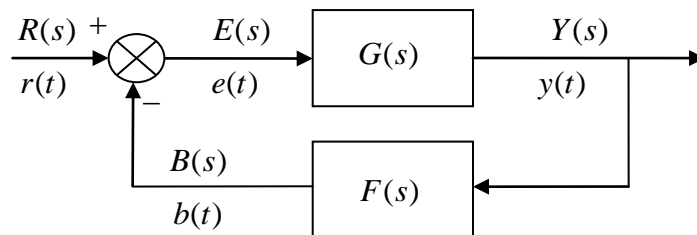
$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.20)$$

Ωστόσο, μερικές φορές είναι αδύνατο ή ασύμφορο να χρησιμοποιηθεί μια είσοδος αναφοράς του ίδιου επιπέδου ή της ίδιας διάστασης με την έξοδο. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια πηγή χαμηλής τάσης για τον έλεγχο ενός σήματος υψηλής τάσης. Επίσης, σε συστήματα ελέγχου ταχύτητας, όπως είναι οι κινητήρες, μια τάση ή μια γωνιακή θέση συχνά ελέγχει την ταχύτητα. Στις περιπτώσεις αυτές το σφάλμα δεν μπορεί να είναι απλά η διαφορά των σημάτων εισόδου και εξόδου. Στον βρόχο ανάδρασης ενσωματώνεται μια μονάδα (μετατροπέας) που εξασφαλίζει ότι η αφαίρεση αφορά σήματα της ίδιας φύσης και διάστασης. Η μονάδα αυτή έχει συνάρτηση μεταφοράς $F(s) \neq 1$ και το σύστημα ελέγχου έχει τη δομή του Σχ. 4.8.

Το σφάλμα τότε είναι

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (4.21)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - F(s)Y(s) \quad (4.22)$$



Σχήμα 4.8. Μη μοναδιαία ανατροφοδότηση

Το **σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση** είναι η τιμή του σήματος σφάλματος, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Δηλαδή,

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (4.23)$$

Θέτοντας $Y(s) = G(s)E(s)$ στη σχέση (4.22), προκύπτει

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (4.24)$$

και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνεται

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4.25)$$

ή

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (4.26)$$

Οι σχέσεις (4.25), (4.26) χρησιμοποιούνται στην πράξη για τον υπολογισμό του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος με περιγραφή πόλων – μηδενικών (παραγοντοποιημένη)

$$G(s)F(s) = \frac{K(1+T_{b_1}s)(1+T_{b_2}s)\dots(1+T_{b_m}s)}{s^j(1+T_{a_1}s)(1+T_{a_2}s)\dots(1+T_{a_n}s)} \quad (4.27)$$

όπου K είναι η σταθερά ενίσχυσης και T_{a_i} , T_{b_i} χρονικές σταθερές. Ο βαθμός πολλαπλότητας του πόλου της $G(s)F(s)$ στο σημείο $s=0$ είναι j και ορίζεται ως **τύπος του συστήματος**. Στη γενική περίπτωση (4.27) το σύστημα είναι τύπου j . Οι τιμές των m , n , T_{a_i} , T_{b_i} δεν επηρεάζουν τον τύπο του συστήματος ούτε την τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.

4.3.1 Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με είσοδο βηματική συνάρτηση – Σφάλμα θέσης

Θεωρούμε το σύστημα του Σχ. 4.8. Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η βηματική συνάρτηση πλάτους A , δηλαδή, $r(t) = Au(t)$. Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής είναι $R(s) = A/s$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος ονομάζεται **σφάλμα θέσης**. Από την (4.26) προκύπτει

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s)} \quad (4.28)$$

Η ποσότητα

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s) \quad (4.29)$$

ορίζεται ως **σταθερά σφάλματος θέσης**. Οπότε το σφάλμα θέσης του συστήματος γράφεται με τη μορφή,

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{1 + K_p} \quad (4.30)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το σφάλμα θέσης θα είναι μηδενικό, μόνον όταν η σταθερά σφάλματος θέσης απειρίζεται. Αυτό συμβαίνει, όταν το σύστημα είναι τουλάχιστον τύπου 1, όπως φαίνεται από την (4.27). Συνοπτικά, το σφάλμα θέσης είναι:

| | |
|------------------------------------|--|
| Σύστημα τύπου 0 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{1 + K_p} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 1 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$ |

4.3.2 Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης – Σφάλμα ταχύτητας

Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η συνάρτηση αναρρίχησης $r(t) = Atu(t)$. Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής είναι $R(s) = A/s^2$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος ονομάζεται **σφάλμα ταχύτητας**. Από την (4.26) προκύπτει

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^2)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s)} \quad (4.31)$$

Ορίζεται ως **σταθερά σφάλματος ταχύτητας** η ποσότητα

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s) \quad (4.32)$$

οπότε το σφάλμα ταχύτητας του συστήματος είναι

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_v} \quad (4.33)$$

Για να μηδενιστεί το σφάλμα ταχύτητας θα πρέπει η σταθερά σφάλματος ταχύτητας να απειρίζεται, πράγμα που συμβαίνει όταν το σύστημα είναι τύπου 2 ή και μεγαλύτερου. Συνοπτικά, για το σφάλμα ταχύτητας έχουμε

| | |
|------------------------------------|--|
| Σύστημα τύπου 0 | $e_{ss}(t) \rightarrow \infty$ |
| Σύστημα τύπου 1 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{K_v} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 2 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$ |

4.3.3 Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με είσοδο παραβολική συνάρτηση – Σφάλμα επιτάχυνσης

Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η παραβολική συνάρτηση $r(t) = A(t^2/2)u(t)$. Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής είναι $R(s) = A/s^3$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος ονομάζεται **σφάλμα επιτάχυνσης**. Από την (4.26) προκύπτει ότι είναι

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^3)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s)} \quad (4.34)$$

Ορίζεται ως **σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης** η ποσότητα

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s) \quad (4.35)$$

οπότε το σφάλμα επιτάχυνσης του συστήματος είναι,

$$e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} \quad (4.36)$$

Για να μηδενιστεί το σφάλμα επιτάχυνσης θα πρέπει η σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης να απειρίζεται, πράγμα που συμβαίνει όταν το σύστημα είναι τύπου 3 ή και μεγαλύτερου. Συνοπτικά, για το σφάλμα επιτάχυνσης έχουμε

| | |
|------------------------------------|--|
| Σύστημα τύπου 0 ή 1 | $e_{ss}(t) \rightarrow \infty$ |
| Σύστημα τύπου 2 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 3 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$ |

Οι σταθερές σφαλμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης έχουν νόημα στην ανάλυση του σφάλματος, μόνον όταν το σήμα εισόδου είναι αντίστοιχα η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση αναρρίχησης και η παραβολική συνάρτηση.

Στην παράγραφο αυτή, η ανάλυση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης στηρίχθηκε στην εφαρμογή του θεωρήματος της τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace στη συνάρτηση σφάλματος. Η φυσική σημασία αυτής της εφαρμογής είναι ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης που υπολογίζεται παριστάνει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής εξόδου και της επιθυμητής εξόδου που σε μερικές περιπτώσεις, όπως αυτές που παρουσιάστηκαν, έχει την ίδια μορφή με την είσοδο αναφοράς. Μια άλλη συνέπεια της εφαρμογής του θεωρήματος τελικής τιμής είναι ότι στην ανάλυση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης πρέπει πρώτα να εξετάζεται κατά πόσον η συνάρτηση $sE(s)$ έχει πόλους στον άξονα των φανταστικών αριθμών ή στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Αυτό γίνεται για λόγους ευστάθειας που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ένα μειονέκτημα των σταθερών σφάλματος είναι ότι δεν δίνουν καμία πληροφορία για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, όταν οι είσοδοι είναι διαφορετικές από αυτές που έχουν αναφερθεί. Μια άλλη δυσκολία είναι ότι όταν το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι συνάρτηση του χρόνου, οι σταθερές σφάλματος δίνουν απάντηση μόνο για το τι συμβαίνει για $t \rightarrow \infty$, ενώ δεν δίνουν καμία πληροφορία για το πώς το σφάλμα μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται μία μέθοδος που δίνει γενικότερη περιγραφή του σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση.

4.3.4 Μέθοδος σειράς σφάλματος

Ο στόχος της μεθόδου αυτής είναι να δώσει μια γενικότερη τεχνική υπολογισμού του σφάλματος που να επιτρέπει τη χρησιμοποίηση οποιασδήποτε αυθαίρετης συνάρτησης ως εισόδου αναφοράς. Κατ' αρχάς, θα μετασχηματίσουμε τη συνάρτηση σφάλματος

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (4.37)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ίδια με την (4.24), στην οποία εφαρμόστηκε το θεώρημα της τελικής τιμής. Εδώ, θα χρησιμοποιηθεί το συνελκτικό ολοκλήρωμα. Ορίζεται ως **συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος** η ποσότητα,

$$W(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} \quad (4.38)$$

οπότε

$$E(s) = W(s)R(s) \quad (4.39)$$

Το συνελικτικό ολοκλήρωμα

$$e(t) = \int_{-\infty}^t w(\tau)r(t-\tau)d\tau \quad (4.40)$$

είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $E(s)$, όπου $w(\tau) = L^{-1}[W(s)]$. Υποθέτοντας ότι $\forall t \in [0, \infty)$ υπάρχουν οι n πρώτες παράγωγοι της $r(t)$ και ότι η συνάρτηση $r(t-\tau)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor, έχουμε,

$$r(t-\tau) = r(t) - \tau r^{(1)}(t) + \frac{\tau^2}{2!} r^{(2)}(t) - \frac{\tau^3}{3!} r^{(3)}(t) + \dots \quad (4.41)$$

Επειδή η $r(t)$ είναι μηδέν για αρνητικό χρόνο, το συνελικτικό ολοκλήρωμα (4.40) θα ληφθεί από 0 έως t . Αντικαθιστώντας την (4.41) στην (4.40), προκύπτει,

$$e(t) = r(t) \int_0^t w(\tau)d\tau - r^{(1)}(t) \int_0^t \tau w(\tau)d\tau + r^{(2)}(t) \int_0^t \frac{\tau^2}{2!} w(\tau)d\tau - r^{(3)}(t) \int_0^t \frac{\tau^3}{3!} w(\tau)d\tau + \dots \quad (4.42)$$

Όπως και προηγουμένως, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι,

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (4.43)$$

δηλαδή,

$$e_{ss}(t) = r_{ss}(t) \int_0^\infty w(\tau)d\tau - r_{ss}^{(1)}(t) \int_0^\infty \tau w(\tau)d\tau + r_{ss}^{(2)}(t) \int_0^\infty \frac{\tau^2}{2!} w(\tau)d\tau - r_{ss}^{(3)}(t) \int_0^\infty \frac{\tau^3}{3!} w(\tau)d\tau + \dots \quad (4.44)$$

όπου

$$r_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \quad (4.45)$$

Ορίζονται οι σταθερές,

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau \\
 C_1 &= -\int_0^{\infty} \tau w(\tau) d\tau \\
 C_2 &= \int_0^{\infty} \tau^2 w(\tau) d\tau \\
 &\vdots \\
 C_n &= (-1)^n \int_0^{\infty} \tau^n w(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Τότε η (4.44) γράφεται με τη μορφή,

$$e_{ss}(t) = C_0 r_{ss}(t) + C_1 r_{ss}^{(1)}(t) + \frac{C_2}{2!} r_{ss}^{(2)}(t) + \dots + \frac{C_n}{n!} r_{ss}^{(n)}(t) + \dots \tag{4.47}$$

Η σειρά (4.47) λέγεται **σειρά σφάλματος** και οι σταθερές C_1, C_2, \dots, C_n λέγονται **συντελεστές σφάλματος**.

Οι συντελεστές σφάλματος μπορούν να υπολογιστούν και ευκολότερα με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς σφάλματος $W(s)$. Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} W(s) \\
 C_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW(s)}{ds} \\
 C_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2 W(s)}{ds^2} \\
 &\vdots \\
 C_n &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n W(s)}{ds^n}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Παράδειγμα 4.1

Έστω το σύστημα μοναδιαίας ανατροφοδότησης με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου,

$$G(s) = \frac{K}{s+1}$$

Επειδή το σύστημα είναι τύπου 0, οι σταθερές σφαλμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι, αντίστοιχα, $K_p = K$, $K_v = 0$ και $K_a = 0$. Επίσης, οι τιμές των σφαλμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι, αντίστοιχα,

| | |
|--------------------|-----------------------------|
| Σφάλμα θέσης | $e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K}$ |
| Σφάλμα ταχύτητας | $e_{ss}(t) = \infty$ |
| Σφάλμα επιτάχυνσης | $e_{ss}(t) = \infty$ |

Είναι φανερό ότι οι σταθερές σφάλματος δεν καταφέρνουν να δείξουν τον ακριβή τρόπο με τον οποίο το σφάλμα αυξάνει με το χρόνο. Γι' αυτό κανονικά, αν θέλουμε να βρούμε την μεταβολή του σφάλματος μέχρι να φτάσει στη μόνιμη κατάσταση, θα πρέπει να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορεί αυτή να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη σειρά σφάλματος. Έχουμε

$$W(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+1+K}$$

Οι συντελεστές σφάλματος είναι

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \frac{1}{1+K} \\ C_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW(s)}{ds} = \frac{K}{(1+K)^2} \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2W(s)}{ds^2} = \frac{-2K}{(1+K)^3} \end{aligned}$$

Η σειρά σφάλματος γράφεται

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} r_{ss}(t) + \frac{K}{(1+K)^2} r_{ss}^{(1)}(t) - \frac{K}{(1+K)^3} r_{ss}^{(2)}(t) + \dots$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ειδικές εισόδους:

1. Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $r(t) = u(t)$. Όλες οι παράγωγοι της $r_{ss}(t)$ είναι μηδενικές. Η σειρά σφάλματος είναι

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} u(t)$$

2. Συνάρτηση αναρρίχησης $r(t) = tu(t)$. Είναι $r^{(1)}(t) = u(t)$, ενώ όλες οι παράγωγοι ανώτερης τάξης είναι μηδενικές. Η σειρά σφάλματος γίνεται

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} tu(t) + \frac{K}{(1+K)^2} u(t)$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το $e(t)$ αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου.

3. Παραβολική συνάρτηση $r(t) = (t^2/2)u(t)$. Είναι $r^{(1)}(t) = tu(t)$, $r^{(2)}(t) = u(t)$, ενώ όλες οι παράγωγοι ανώτερης τάξης είναι μηδενικές. Η σειρά σφάλματος γίνεται

$$e_{ss}(t) = \left[\frac{1}{1+K} \frac{t^2}{2} + \frac{K}{(1+K)^2} t - \frac{K}{(1+K)^3} \right] u(t)$$

Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα αυξάνει ανάλογα του t^2 .

4. Μια είσοδος της μορφής $r(t) = [a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2} + e^{-a_3 t}]u(t)$, όπου a_0, a_1, a_2, a_3 είναι σταθερές. Έχουμε $r^{(1)}(t) = (a_1 + a_2 t)u(t)$, $r^{(2)}(t) = a_2 u(t)$ και

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} r(t) + \frac{K}{(1+K)^2} r^{(1)}(t) - \frac{K}{(1+K)^3} r^{(2)}(t)$$

Παράδειγμα 4.2

Έστω και πάλι το σύστημα του Παραδείγματος 4.1 με είσοδο την ημιτονοειδή συνάρτηση. Είναι

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin \omega t \\ r^{(1)}(t) &= \omega \cos \omega t \\ r^{(2)}(t) &= -\omega^2 \sin \omega t \\ r^{(3)}(t) &= -\omega^3 \cos \omega t \\ &\vdots \end{aligned}$$

Η σειρά σφάλματος είναι

$$e_{ss}(t) = \left[C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega^2 + \frac{C_4}{4!} \omega^4 - \dots \right] \sin \omega t + \left[C_1 \omega - \frac{C_3}{3!} \omega^3 + \dots \right] \cos \omega t$$

Λόγω της ημιτονοειδούς εισόδου, η σειρά σφάλματος είναι μια σειρά απείρων όρων. Η σύγκλιση της είναι απαραίτητη για να έχει νόημα το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση. Είναι φανερό ότι η σύγκλιση εξαρτάται από τις τιμές των ω και K . Έστω $\omega = 2$ και $K = 100$. Τότε έχουμε (από το Παράδειγμα 4.1),

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{1+K} = 0.0099 \\C_1 &= \frac{K}{(1+K)^2} = 0.0098 \\C_2 &= \frac{-2K}{(1+K)^3} = -0.000194 \\C_3 &= \frac{6K}{(1+K)^5} = 5.65 \times 10^{-8} \\&\vdots\end{aligned}$$

Επίσης, για το σφάλμα έχουμε

$$\begin{aligned}e_{ss}(t) &\cong \left[0.0099 + \frac{0.000194}{2} \times 4 \right] \sin 2t + 0.0196 \cos 2t \\&= 0.01029 \sin 2t + 0.0196 \cos 2t\end{aligned}$$

ή

$$e_{ss}(t) \cong 0.02215 \sin(2t + 62.3^\circ)$$

όπου κατά προσέγγιση πήραμε μόνο τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς.

4.3.5 Δείκτης συμπεριφοράς

Κατά τη σχεδίαση ενός συστήματος, επιδιώκεται γενικά το κλειστό σύστημα να έχει μικρή υπερύψωση y_m , γρήγορο χρόνο ανύψωσης και μικρούς χρόνους καθυστέρησης και αποκατάστασης. Επίσης, επιδιώκεται να είναι μικρό το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση. Για τον λόγο αυτό είναι καλό να χρησιμοποιείται ένας δείκτης συμπεριφοράς που δίνει ένα μέτρο της συνολικής ποιότητας της απόκρισης.

Έστω $r(t)$ το σήμα εισόδου ενός συστήματος και $y(t)$ το σήμα εξόδου. Μερικές φορές, το σήμα $r(t)$ παριστά την επιθυμητή απόκριση του συστήματος. Όπως είναι γνωστό, η διαφορά τους ορίζεται ως σήμα σφάλματος $e(t) \triangleq r(t) - y(t)$. Στην προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί το σήμα σφάλματος χρησιμοποιούμε δείκτες συμπεριφοράς με τη μορφή ολοκληρωμάτων ως προς τον χρόνο ή συναρτήσεων του σφάλματος. Η απλούστερη μορφή είναι

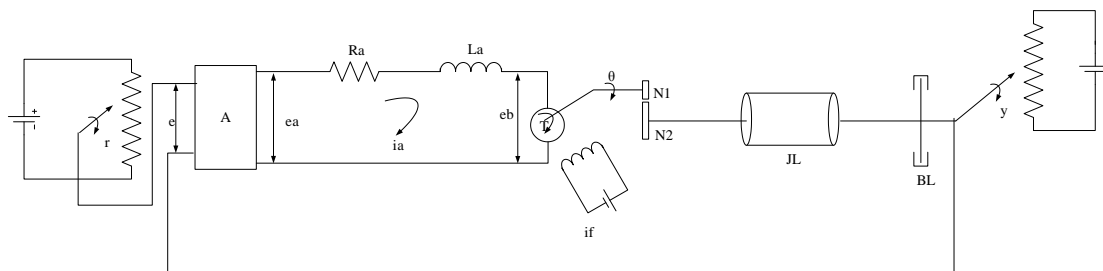
$$I = \int_0^{\infty} e(t) dt$$

η οποία όμως δεν προσφέρεται, από πρακτική άποψη. Πράγματι, η ελαχιστοποίηση του $e(t)$ ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της περιοχής κάτω από το $e(t)$ και ένα σήμα με ταλαντώσεις θα έδινε μια μηδενική περιοχή, άρα μηδενικό I . Άλλες, πιο κατάλληλες από πρακτική άποψη μορφές του δείκτη συμπεριφοράς είναι

$$I = \int_0^{\infty} |e(t)| dt, \quad I = \int_0^{\infty} te(t) dt, \quad I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

4.4 Χρονική απόκριση σερβομηχανισμού θέσης

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη χρονική συμπεριφορά του συστήματος ελέγχου θέσης που έχει περιγραφεί και στο Κεφ. 2.



Σχήμα 4.9. Σύστημα ελέγχου θέσης

Υπάρχει ένα φορτίο L που χαρακτηρίζεται από ιζώδη τριβή και αδράνεια. Ο ανιχνευτής σφάλματος αποτελείται από δύο ποτενσιόμετρα και έχει ευαισθησία K_s . Αυτός, στέλνει στον ενισχυτή το σήμα σφάλματος, το οποίο είναι ανάλογο της διαφοράς μεταξύ των γωνιακών μετατοπίσεων εισόδου αναφοράς και εξόδου. Η έξοδος του ενισχυτή χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του τυλίγματος δρομέα του κινητήρα dc. Το ρεύμα του κινητήρα θεωρείται σταθερό. Οι παράμετροι του κινητήρα δίνονται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2. Παράμετροι κινητήρα

| Μεγέθη | Τιμές |
|--|---|
| Ευαισθησία διάταξης ανάδειξης σφάλματος (σταθερά ποτενσιομέτρων) | $K_s = 1 \text{ volt} / \text{rad}$ |
| Κέρδος ενισχυτή | $A = \text{μεταβλητό}$ |
| Αντίσταση τυλίγματος δρομέα | $R_a = 5 \Omega$ |
| Αυτεπαγωγή τυλίγματος δρομέα | $L_a = \text{αμελητέα}$ |
| Ροπή αδράνειας ρότορα κινητήρα | $J_m = 10^{-3} \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{sec}^2$ |
| Συντελεστής τριβής ατράκτου κινητήρα | $B_m = \text{αμελητέα}$ |
| Συντελεστής τριβής ατράκτου φορτίου | $B_L = 0.1 \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{sec}$ |
| Ροπή αδράνειας φορτίου | $J_L = 0.1 \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{sec}^2$ |
| Λόγος μετάδοσης κίνησης | $n = N_1 / N_2 = 1/10$ |
| Σταθερά ροπής κινητήρα | $K_i = 0.5 \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{amp}$ |
| Σταθερά κινητήρα | $K_b = 0.68 \text{ volt} / \text{rad} / \text{sec}$ |
| Συντελεστής ισοδύναμης αδράνειας | $J_{me} = 2 \times 10^{-3} \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{sec}^2$ |
| Συντελεστής ιζώδους τριβής | $B_{me} = 10^{-3} \text{ lb} \times \text{ft} \times \text{sec}$ |

Εξισώσεις του συστήματος

Διάταξη ανάδειξης σφάλματος: η γωνία σφάλματος \mathcal{G}_e ισούται με τη διαφορά της γωνίας αναφοράς \mathcal{G}_r και της γωνίας εξόδου \mathcal{G}_y , δηλαδή

$$\mathcal{G}_e(t) = \mathcal{G}_r(t) - \mathcal{G}_y(t)$$

$$e(t) = K_s \mathcal{G}_e(t)$$

Ενισχυτής:

$$e_a(t) = A e(t)$$

Τύλιγμα δρομέα – Κινητήρας:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) + e_a(t) - e_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t)$$

Έξοδος:

$$\frac{d\mathcal{G}_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$$

$$\mathcal{G}_y(t) = n \mathcal{G}_m(t)$$

Περιγραφή χώρου κατάστασης

Από τις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει η περιγραφή χώρου κατάστασης,

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\mathcal{G}_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{nAK_s}{L_a} \\ \frac{K_i}{J_{me}} & -\frac{B_{me}}{J_{me}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \mathcal{G}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AK_s}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{G}_r(t)$$

όπου

$$J_{me} = \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -B_{me} \omega_m(t) + T_m(t)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t)$$

Η εξίσωση εξόδου είναι

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_n(t) \\ \mathcal{Y}_m(t) \end{bmatrix}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$\frac{\mathcal{Y}_y(s)}{\mathcal{Y}_r(s)} = \frac{nK_s AK_i}{R_a B_{me} s(1 + \tau_a s)(1 + \tau_{me} s) + K_b K_i s + nK_s AK_i}$$

όπου οι χρονικές σταθερές τ_a και τ_{me} δίνονται από τις σχέσεις

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a} = \text{αμελητέα}$$

$$\tau_{me} = \frac{J_{me}}{B_{me}} = 2 \text{ sec}$$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω περιγραφή το σύστημα ελέγχου θέσης είναι **τρίτης τάξης**.

Το σφάλμα μεταξύ εισόδου αναφοράς και εξόδου είναι $\mathcal{Y}_e(t) = \mathcal{Y}_r(t) - \mathcal{Y}_y(t)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι,

$$G(s) = \frac{\mathcal{Y}_y(s)}{\mathcal{Y}_e(s)} = \frac{nK_s AK_i}{R_a B_{me} s(1 + \tau_a s)(1 + \tau_{me} s) + K_b K_i s}$$

4.4.1 Απόκριση του συστήματος 2^{ης} τάξης

Κύριος στόχος είναι η μελέτη της χρονικής απόκρισης του συστήματος ελέγχου θέσης, σε σχέση με τις παραμέτρους του, υποθέτοντας ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Επειδή η L_a είναι αμελητέα (συνεπώς και η τ_a), η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος απλοποιείται στη μορφή

$$\frac{\mathcal{Y}_y(s)}{\mathcal{Y}_r(s)} = \frac{nK_s AK_i}{R_a J_{me} s^2 + (K_b K_i + R_a B_{me})s + nK_s AK_i}$$

η οποία είναι **δεύτερης τάξης**. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς συμβολισμούς του συστήματος δεύτερης τάξης.

Η φυσική συχνότητα ω_n είναι

$$\omega_n = \pm \left(\frac{nK_s AK_i}{R_a J_{me}} \right)^{1/2}$$

Ο συντελεστής απόσβεσης ζ είναι

$$\zeta = \frac{K_b K_i + R_a B_{me}}{2R_a J_{me} \omega_n} = \frac{K_b K_i + R_a B_{me}}{2(nK_s AK_i R_a J_{me})^{1/2}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων, προκύπτει

$$\frac{\mathcal{G}_y(s)}{\mathcal{G}_r(s)} = \frac{5A}{s^2 + 34.5s + 5A}$$

Έστω ότι το κέρδος του ενισχυτή παίρνει την αυθαίρετη τιμή $A=200$. Η φυσική συχνότητα και ο συντελεστής απόσβεσης είναι, αντίστοιχα, $\omega_n = \pm 31.6 \text{ rad/sec}$ και $\zeta = 0.546$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος τότε γίνεται

$$s^2 + 34.5s + 1000 = 0$$

και έχει ρίζες

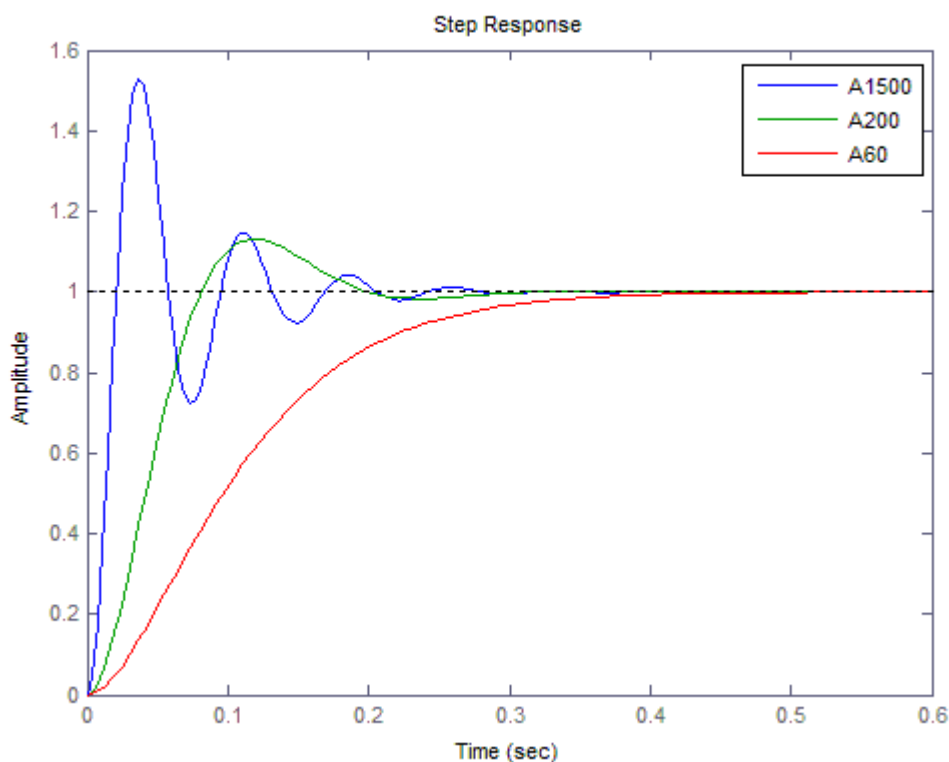
$$s_{1,2} = -17.25 \pm j26.5$$

Χρονική απόκριση για μοναδιαία βηματική είσοδο

Έστω ότι η είσοδος αναφοράς είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $\mathcal{G}_r(t) = u(t) \text{ rad}$. Τότε, η έξοδος του συστήματος, για μηδενικές αρχικές συνθήκες, είναι

$$\mathcal{G}_y(t) = L^{-1} \left[\frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} \right] = 1 + 1.2e^{-17.25t} \sin(26.5t + 236.8^\circ)$$

Η μεταβολή της εξόδου συναρτήσει του κανονικοποιημένου χρόνου απεικονίζεται στο Σχ. 4.10. Στο σχήμα αυτό απεικονίζονται επίσης οι βηματικές αποκρίσεις για δύο διαφορετικές τιμές του κέρδους ενίσχυσης A . Όπως αναμένεται από τις προηγούμενες σχέσεις, η αύξηση του A συνεπάγεται αύξηση της φυσικής συχνότητας ω_n και ελάττωση του συντελεστή απόσβεσης ζ .



Σχήμα 4.10. Βηματική απόκριση συστήματος ελέγχου θέσης

Για $A=1500$, είναι $\zeta=0.2$ και $\omega_n=86.2$ rad/sec. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μεγάλη υπερύψωση, ενώ οι χρόνοι απόκρισης εμφανίζονται ελαττωμένοι. Όταν η ενίσχυση έχει τη σχετικά χαμηλή τιμή $A=60$, ο συντελεστής απόσβεσης και η φυσική συχνότητα είναι, αντίστοιχα, $\zeta=1$ και $\omega_n=17.25$ rad/sec. Στην περίπτωση αυτή έχουμε υπεραπόσβεση. Συγκριτικές τιμές δίνονται στον Πίνακα 4.3.

Πίνακας 4.3. Χαρακτηριστικά βηματικής απόκρισης για διαφορετικές τιμές ενίσχυσης

| Κέρδος A | Συντελεστής απόσβεσης ζ | Φυσική συχνότητα ω_n | Μέγιστη υπερύψωση | Χρόνος καθυστέρη- σης T_d | Χρόνος ανύψωσης T_r | Χρόνος αποκατά- στασης T_s |
|---------------|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| 60 | 1 | 17.25 | 0 | 0.101 | 0.0193 | 0.334 |
| 200. | 0.546 | 31.6 | 0.13 | 0.043 | 0.055 | 0.184 |
| 1500. | 0.2 | 86.6 | 0.52 | 0.013 | 0.014 | 0.2260 |

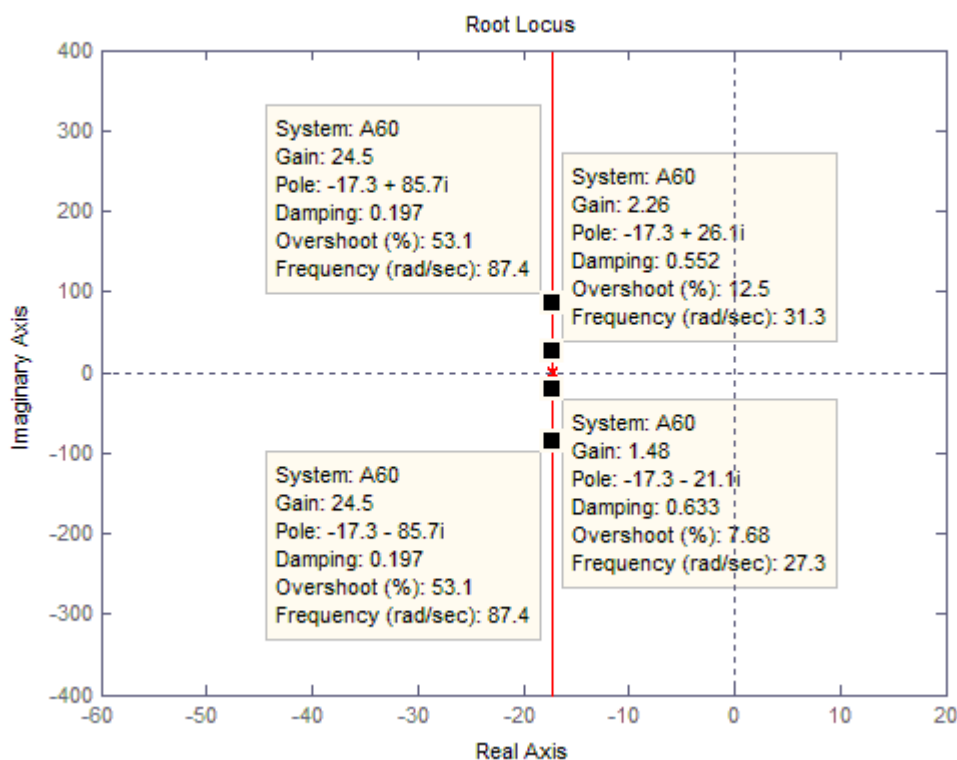
Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος συναρτήσει του A δίνονται από τη σχέση,

$$s_{1,2} = -17.25 \pm \frac{1}{2}(1190 - 20A)^{1/2}$$

Για διαφορετικές τιμές ενίσχυσης είναι

| | |
|------------|------------------------------|
| $A = 13.5$ | $s_1 = -2.1, s_2 = -32.4$ |
| $A = 200$ | $s_{1,2} = -17.25 \pm j26.5$ |
| $A = 1500$ | $s_{1,2} = -17.25 \pm j86$ |

Η θέση των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς το A μεταβάλλεται, απεικονίζεται στο Σχ. 4.11.



Σχήμα 4.11. Διάγραμμα γεωμετρικού τόπου των ριζών

Για τις διάφορες θέσεις των ριζών έχουμε επίσης τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 4.4. Πόλοι του συστήματος και χαρακτηριστικά χρονικής απόκρισης σε σχέση με τις τιμές της ενίσχυσης

| Κέρδος ενίσχυσης A | Ρίζες χαρακτηριστικής εξίσωσης | Δυναμική συμπεριφορά |
|----------------------|--|----------------------------------|
| $0 < A < 59.5$ | πραγματικές, διακεκριμένες, αρνητικές | υπεραπόσβεση ($\zeta > 1$) |
| $A = 59.5$ | αρνητικές, ίσες | κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$) |
| $59.5 < A < \infty$ | μιγαδικές, συζυγείς με αρνητικό πραγματικό μέρος | υποαπόσβεση ($\zeta < 1$) |
| $-\infty < A < 0$ | πραγματικές, διακεκριμένες, ετερόσημες | αστάθεια ($\zeta < 0$) |

Σφάλμα μόνιμης κατάστασης

Για το σύστημα που μελετούμε έχει βρεθεί ήδη ότι

$$G(s) = \frac{nK_s AK_i}{R_a B_{me} s(1 + \tau_a s)(1 + \tau_{me} s) + K_b K_i s}$$

και $F(s) = 1$. Συνεπώς, το σύστημα αυτό είναι τύπου 1. Άρα το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση είναι μηδέν για όλες τις θετικές τιμές του A , όταν η είσοδος είναι βηματική συνάρτηση (σφάλμα θέσης).

Εξάλλου, η σταθερά σφάλματος θέσης είναι

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5A}{s(s + 34.5)} = \infty$$

και το σφάλμα θέσης είναι,

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

όπου θεωρήθηκε ότι το πλάτος της βηματικής συνάρτησης είναι μοναδιαίο.

Χρονική απόκριση με είσοδο τη συνάρτηση αναρρίχησης

Έστω ότι στο σύστημα ελέγχου θέσης εφαρμόζεται ως είσοδος αναφοράς η συνάρτηση αναρρίχησης $\mathcal{G}_r(t) = tu(t)$. Τότε η έξοδος θα δίνεται από τη σχέση

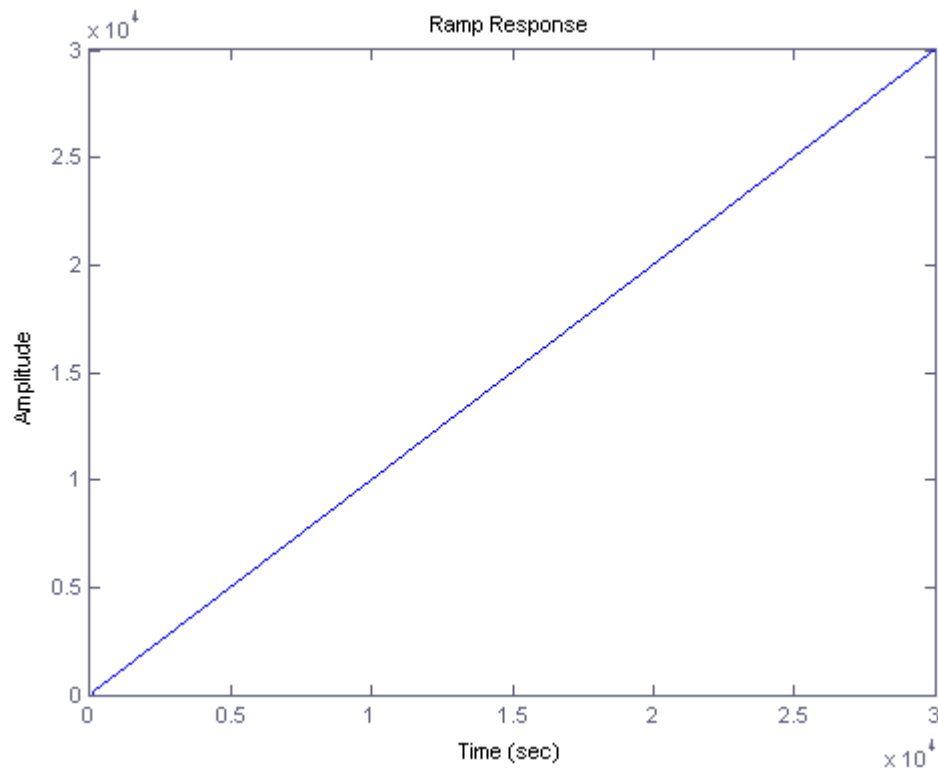
$$\mathcal{G}_y(t) = L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

ή

$$\mathcal{G}_y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin[\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} t - \phi]$$

$$\phi = 2 \tan^{-1} \frac{(1 - \zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}$$

Η απόκριση αυτή απεικονίζεται στο Σχ. 4.12.



Σχήμα 4.12. Απόκριση συστήματος ελέγχου θέσης για είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης

Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα μόνιμης κατάστασης (σφάλμα ταχύτητας) είναι διάφορο του μηδενός. Πράγματι, η σταθερά σφάλματος ταχύτητας είναι

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5A}{s + 34.5} = \frac{5A}{34.5}$$

Το σφάλμα ταχύτητας είναι

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_v} = \frac{34.5}{5A}$$

Είναι φανερό ότι το σφάλμα αυτό είναι αντιστρόφως ανάλογο του μέτρου της σταθεράς ενίσχυσης A . Ωστόσο, αν θέλουμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια στη μόνιμη κατάσταση αυξάνοντας το A , τότε η μεταβατική απόκριση εμφανίζει περισσότερες ταλαντώσεις. Το φαινόμενο αυτό είναι χαρακτηριστικό σε όλα τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Για συστήματα ανώτερης τάξης, αν το κέρδος A γίνει πολύ μεγάλο, το σύστημα μπορεί να γίνει και ασταθές.

4.4.2 Απόκριση του συστήματος 3^{ης} τάξης

Στην προηγούμενη παράγραφο θεωρήθηκε η αυτεπαγωγή L_a αμελητέα. Έτσι το σύστημα περιγράφηκε με μια απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς δεύτερης τάξης, η οποία είναι ευσταθής για όλες τις θετικές τιμές του A . Στο ίδιο σύστημα υποθέτουμε τώρα ότι $L_a = 0.1H$, ενώ όλες οι άλλες παράμετροι παραμένουν αμετάβλητες. Η χρονική σταθερά τ_a τότε γίνεται $\tau_a = 0.02 \text{ sec}$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$\frac{\mathcal{G}_y(s)}{\mathcal{G}_r(s)} = \frac{0.05A}{0.005s(1+0.02s)(1+2s)+0.34s+0.05A}$$

ή

$$\frac{\mathcal{G}_y(s)}{\mathcal{G}_r(s)} = \frac{250A}{s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 250A}$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{\mathcal{G}_y(s)}{\mathcal{G}_e(s)} = \frac{250A}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι,

$$s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 250A = 0$$

Όπως είναι φανερό, όταν η L_a δεν είναι αμελητέα, το σύστημα είναι τρίτης τάξης.

Έστω $A = 13.5H$ συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι,

$$\frac{\mathcal{G}_y(s)}{\mathcal{G}_r(s)} = \frac{1}{(1+0.48s)(1+0.0298s+0.000616s^2)}$$

της οποίας οι πόλοι είναι, $s_1 = -2.08$, $s_{2,3} = -24.2 \pm j32.2$.

Για μοναδιαία βηματική είσοδο, η απόκριση είναι,

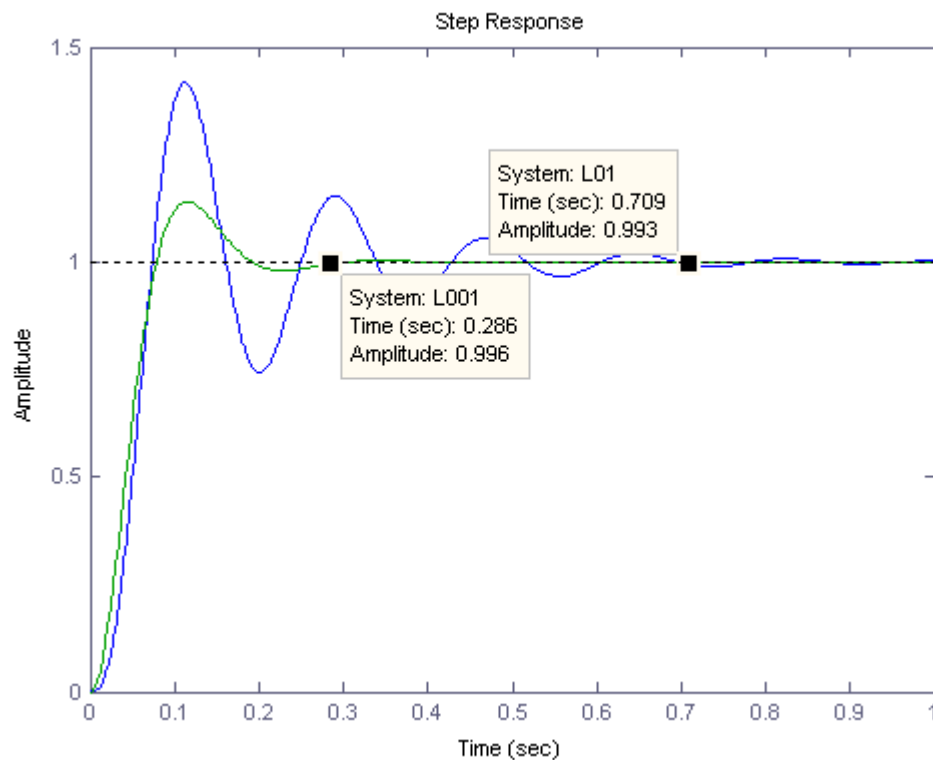
$$\mathcal{G}_y(t) = 1 - 1.06e^{-2.08t} + 0.0667e^{-24.2t} \sin(32.2t + 1.88^\circ)$$

Παρατηρούμε ότι ο καθαρά εκθετικός όρος είναι τουλάχιστον 10 φορές μεγαλύτερος από τον ημιτονοειδή όρο. Άρα η μεταβατική απόκριση καθορίζεται κύρια από τον πόλο $s_1 = -2.08$. Εξάλλου, η συνιστώσα της απόκρισης που οφείλεται στον ημιτονοειδή όρο μηδενίζεται πολύ γρήγορα, καθώς αυξάνει ο χρόνος, μια και έχει εκθέτη πολύ μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή.

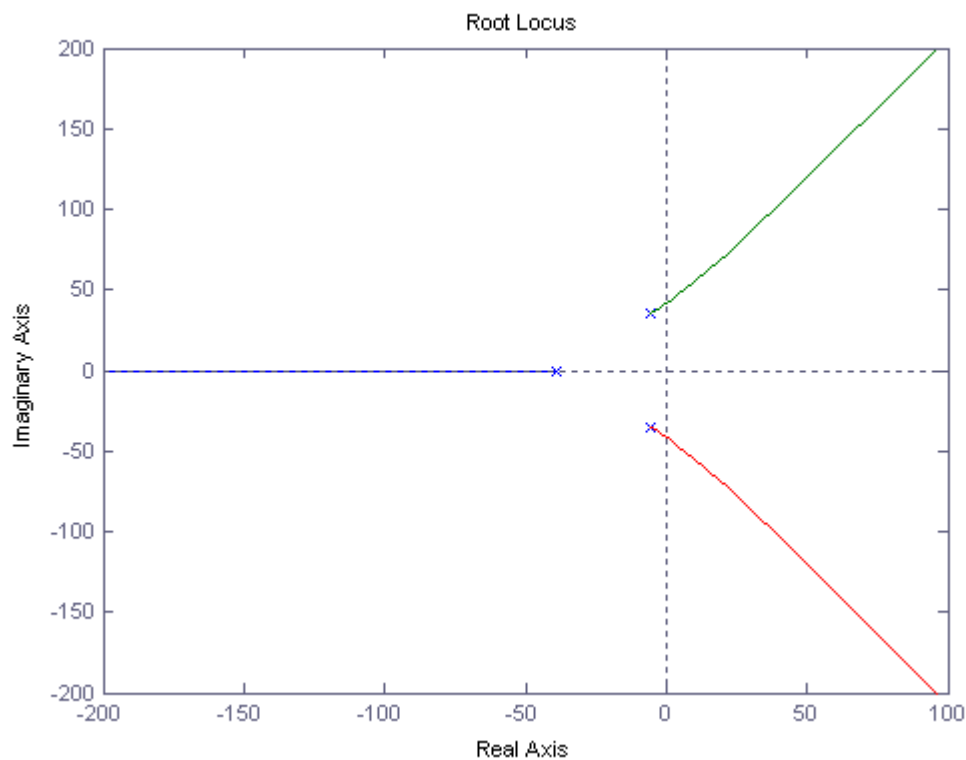
Έστω τώρα $L_a = 0.1H$ και $A = 348$. Η χαρακτηριστική εξίσωση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$(s + 50.5)(s^2 + 1725) = 0$$

Αυτή έχει δύο φανταστικές ρίζες $s_{1,2} = \pm j41.5$ και μία πραγματική $s_3 = -50.5$. Η συνιστώσα της απόκρισης που αντιστοιχεί στις φανταστικές ρίζες είναι συντηρούμενη ταλάντωση και το σύστημα είναι οριακά ευσταθές (αλλά πρακτικά ασταθές). Για $A > 348$ οι φανταστικές ρίζες περνούν στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, οπότε η απόκριση του συστήματος τρίτης τάξης αυξάνει απεριόριστα. Αυτό φαίνεται και από την απεικόνιση του γεωμετρικού τόπου των ριζών.



Σχήμα 4.13. Μοναδιαία βηματική απόκριση συστήματος ελέγχου θέσης για δύο τιμές της L_a και για $A = 200$



Σχήμα 4.14. Γεωμετρικός τόπος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, $A \in [0, \infty)$

4.5 Κύρια σημεία

- Μεταβατική απόκριση – Μόνιμη απόκριση
- Χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης
- Μεταβατική απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης: σημασία των πόλων του συστήματος, συσχέτιση πόλων – συντελεστή απόσβεσης, φυσικής συχνότητας
- Σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση
- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για ειδικές εισόδους: σημασία του τύπου του συστήματος
- Μέθοδος σειράς σφάλματος
- Μελέτη του συστήματος ελέγχου θέσης: περιγραφή (μοντελοποίηση), απλοποίηση μοντέλου. Μελέτη μοντέλου 2^{ης} τάξης: μεταβατική απόκριση, επίδραση του κέρδους ενίσχυσης στα χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης, στις θέσεις των πόλων και στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Μελέτη μοντέλου 3^{ης} τάξης: σημασία του κέρδους ενίσχυσης στο μοντέλο 3^{ης} τάξης – συσχέτιση με την ευστάθεια.

4.6 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

Άσκηση 4.1

Να βρεθεί ο συντελεστής απόσβεσης του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s) = \frac{1638(s^2 + 2.6s + 1.65)}{s(s^2 + 40s + 300)(s^2 + 4.65s + 0.45)}$$

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1638(s^2 + 2.6s + 1.65)}{(s + 32.4)(s + 0.855 \pm j0.672)(s + 5.245 \pm j6.566)}$$

- Κυρίαρχες ή δεσπόζουσες ιδιοτιμές (*dominant eigenvalues*) του συστήματος: $-0.855 \pm j0.672$
- Πιο κοντά στον άξονα των φανταστικών αριθμών
- Ευστάθεια – Αστάθεια

Γενική μορφή:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

$$\text{Πόλοι: } s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$$

$$\zeta\omega_n = 0.855$$

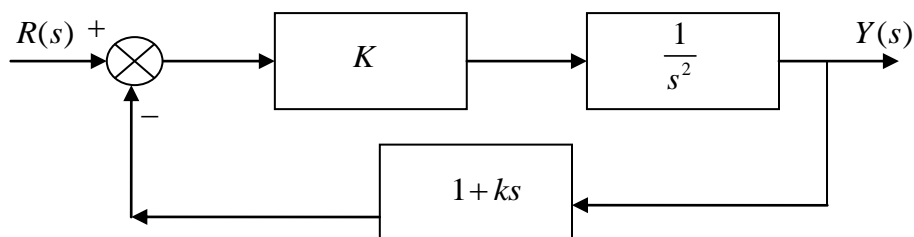
$$\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = 0.672$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\omega_n = \frac{0.855}{\zeta} \quad \text{και} \quad \frac{0.855}{\zeta}(1-\zeta^2)^{1/2} = 0.672 \Rightarrow \dots \zeta = 0.785$$

Άσκηση 4.2

Το διάγραμμα βαθμίδων ενός σερβομηχανισμού είναι το παρακάτω



Να βρεθούν οι τιμές των K και k , έτσι ώστε η μέγιστη υπερύψωση να είναι 50% σε χρόνο 5sec, για μοναδιαία βηματική είσοδο.

Λύση

Για τη μέγιστη υπερύψωση έχουμε:

$$M_p = y_{\max} = e^{-\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}\pi} = 0.5 \Rightarrow \ln 0.5 = -\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}\pi \Rightarrow$$

$$-0.693 = -\frac{\zeta\pi}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \Rightarrow \zeta = 0.21$$

Για τον χρόνο απόκρισης έχουμε:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}} = 5 \text{ sec} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{5(1-\zeta^2)^{1/2}} \Rightarrow \omega_n = 0.644$$

Από το διάγραμμα βαθμίδων έχουμε:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = K \\ 2\zeta\omega_n = Kk \end{cases}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$K = 0.415$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = 0.652$$

Άσκηση 4.3

Να βρεθεί η χρονική απόκριση του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}, \text{ για } r(t) = u(t) \text{ μοναδιαία βηματική είσοδο.}$$

Λύση

$$\text{Θα είναι } R(s) = \frac{1}{s}. \text{ Άρα}$$

$$Y(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+4)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)} = \frac{3/2}{s} + \frac{1/6}{s+4} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-5/3}{(s+1)}$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει

$$y(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - te^{-t} - \frac{5}{3}e^{-t}$$

Άσκηση 4.4

Δίνεται το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με περιγραφή κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -f/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} r(t)$$

Υποθέτοντας τις τιμές των παραμέτρων $\frac{K}{M} = 2$, $\frac{f}{M} = 3$, $M = 1$, να βρεθεί η απόκριση του συστήματος.

Λύση

Οι πίνακες κατάστασης και εισόδου γίνονται:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο μεταβατικός πίνακας είναι:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

όπου $t_0 = 0$.

Η μεταβατική απόκριση είναι

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B(\tau)r(\tau)d\tau$$

Έστω η μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως είσοδος και μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \varphi_{12}(t-\tau)d\tau \\ \int_0^t \varphi_{22}(t-\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

διότι $B(\tau)r(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

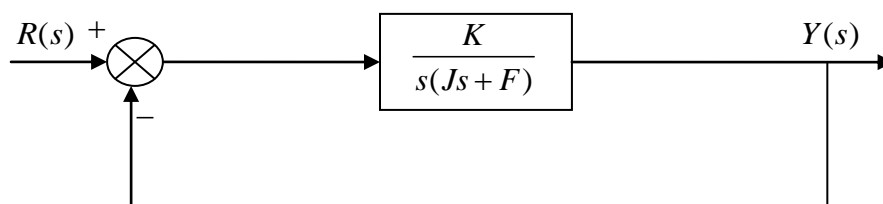
Τότε,

$$x_1(t) = \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)})d\tau = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = \int_0^t (-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)})d\tau = e^{-t} - e^{-2t}$$

Άσκηση 4.5

Δίνεται το σύστημα του σχήματος



- 1 Να βρεθεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης όταν είσοδος είναι η μοναδιαία συνάρτηση αναρρίχησης.
- 2 Να εξεταστεί η επίδραση των παραμέτρων K και F στην τιμή του σφάλματος.

Λύση

$$e_{\mu\sigma\nu}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{K}{s(Js + F)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Js + F}{Js^2 + Fs + K} = \frac{F}{K}$$

Ανάλογο του F και αντιστρόφως ανάλογο του K .

Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση Α4.1

Δίνεται το σύστημα

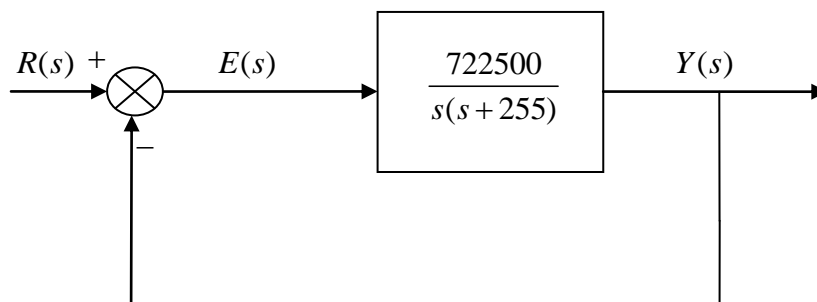
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί η χρονική απόκριση $y(t)$.

Άσκηση Α4.2

Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος.



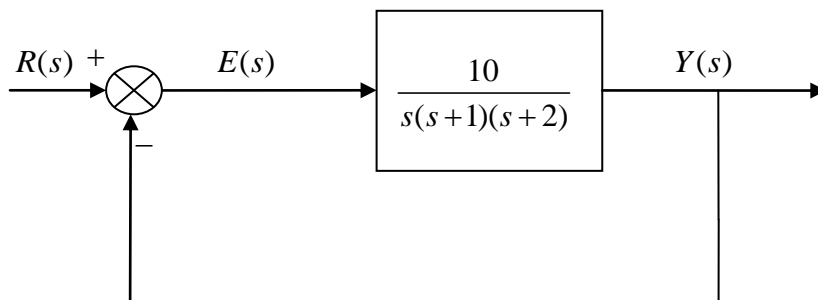
Να βρεθούν τα παρακάτω χαρακτηριστικά του:

1. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου.
2. Η μέγιστη υπερύψωση $y_{\max} - 1$ για μοναδιαία βηματική είσοδο αναφοράς (δίνεται $e^{-0.4763} = 0.6213$).
3. Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_v .
4. Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

5. Πώς αξιολογείται η συμπεριφορά του κλειστού συστήματος με βάση τα χαρακτηριστικά αυτά;

Άσκηση Α4.3

Δίνεται το σύστημα του σχήματος

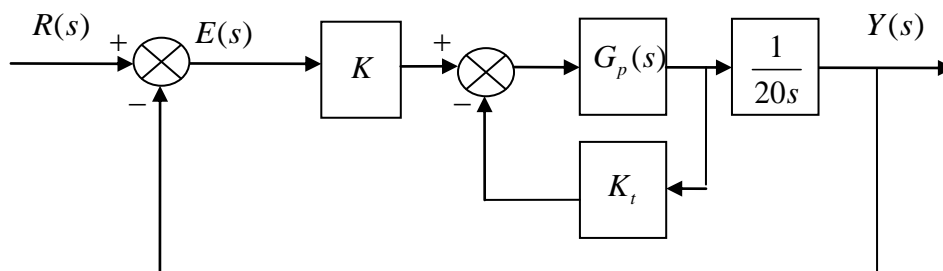


Όπου $R(s)$ είναι η μοναδιαία συνάρτηση αναρρίχησης.

1. Να υπολογιστεί η τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.
2. Ποιο είναι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης που προκύπτει προσθέτοντας έναν ολοκληρωτή στο σύστημα αυτό;

Άσκηση Α4.4

Δίνεται το σύστημα του σχήματος



Όπου

$$G_p(s) = \frac{100}{(1+0.1s)(1+0.5s)}, \quad K > 0, \quad K_t > 0$$

και $r(t)$ η μοναδιαία συνάρτηση αναρρίχησης.

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης που μπορούμε να επιτύχουμε μεταβάλλοντας τα K , K_t ;